Задание 1: Пусть заданы множества $A = \{-3,0,1,3,5\}$, $B = \{-2,0,1,4,5\}$, $C = \{0,2,5,6\}$. Найти множество $(B \cup A) \setminus (C \cup A)$.

Решение:

Элементами множества $B \cup A$ будут элементы, которые принадлежат или множеству В, или множеству А: $B \cup A = \{-3,-2,0,1,3,4,5\}$.

Элементами множества $C \cup A$ будут элементы, которые принадлежат или множеству С, или множеству А: $C \cup A = \{-3,0,1,2,3,5,6\}$.

Искомое множество будет состоять из тех элементов множества $B \cup A$, которые не принадлежат множеству $C \cup A$, тоесть $(B \cup A) \setminus (C \cup A) = \{-2,4\}$.

Ответ: $(B \cup A) \setminus (C \cup A) = \{-2,4\}$

Задание 2: Даны множества $A = \{0,1,5,6,7,8,\#\}$ и $B = \{3,1,2,5,\$\}$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, A / B, $C = \{x \in N | x \notin A\}$, где N-множество натуральных чисел.

Решение:

Множество $A \cup B$ будет состоять из элементов или множества А, или множества В, тоесть $A \cup B = \{0,1,2,3,5,6,7,8,\#,\$\}$.

Множество $A \cap B$ будет состоять из элементов, которые принадлежат и множеству А, и множеству В одновременно, тоесть $A \cap B = \{1,5\}$.

Множество A / B будет состоять из тех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В, тоесть $A / B = \{0,6,7,8,\#\}$.

Множество С состоит из всех натуральных чисел, кроме тех, которые принадлежат множеству А, тоесть: $C = \{x \in N \wedge (x \neq 1, x \neq 5, x \neq 6, x \neq 7, x \neq 8)\}$ или другими словами $C = \{2,3,4,9,10,11,12,...\}$.

Ответ: $A \cup B = \{0,1,2,3,5,6,7,8,\#,\$\}$, $A \cap B = \{1,5\}$, $A / B = \{0,6,7,8,\#\}$,

$C = \{x \in N \wedge (x \neq 1, x \neq 5, x \neq 6, x \neq 7, x \neq 8)\}$.

Задание 3: Вычислить P_n, A_n^k, C_n^k, если $n=8, k=5$.

Решение:

Исходя из определений, имеем:

$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, тогда $P_8 = 8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, тогда $A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{3!} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 6720$.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, тогда $C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{5!\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 8 = 56$

Ответ: 40320, 6720, 56.

Задание 4: в полуфинале первенства по шахматам участвует 20 шахматистов, а в финал выходит лишь трое. Сколько различных комбинаций по три шахматиста можно получить в данном случае?

Решение:

Можно получить $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{17!\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{17!\cdot 2\cdot 3} = 3\cdot 19\cdot 20 = 1140$ различных комбинаций.

Ответ: 1140.

Задание 5: Из слова “адвокат” наугад выбирается одна буква.

а) какова вероятность, что это буква “т”?

б) какова вероятность, что это гласная буква?

Решение:

Искомые вероятности найдем, используя классическое определение вероятности: $p(A) = \frac{m}{n}$, где $m-$число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события А, $n-$общее число возможных элементарных исходов испытания.

а) пусть событие А - из слова “адвокат” наугад выбрана буква “т”.

$n=7$ - буквы “а”, “д”, “в”, “о”, “к”, “а”, “т”

$m=1$ - буква “т”

Тогда искомая вероятность $p(A)=\frac{1}{7}$

б) пусть событие А - из слова “адвокат” наугад выбрана гласная буква.

$n=7$ - буквы “а”, “д”, “в”, “о”, “к”, “а”, “т”

$m=3$ - буквы “а”, “о”, “а”

Тогда искомая вероятность $p(A)=\frac{3}{7}$

Ответ: $\frac{1}{7};\frac{3}{7}$.

Задание 6: В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: в, н, а, с, е. Найти вероятность того, что на вытянутых по одному и расположенных в одну линию кубиков можно будет прочесть слово “весна”.

Решение:

Вероятность событие А - на вытянутых по одному и расположенных в одну линию кубиков можно будет прочесть слово “весна”, найдем, используя классическое определение вероятности.

Число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события А, равно 1 (поскольку слово весна может получиться только 1 раз, когда все буквы будут вытянуты в порядке: в, е, с, н, а), тоесть $m=1$.

Общее число возможных элементарных исходов испытания можно найти как число перестановок из 5 элементов, тоесть $n=P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

Тогда $p(A)=\frac{1}{120}$.

Ответ: $\frac{1}{120}$.

Задание 7: Три курсанта стреляют из пистолета по мишени. Вероятность поражения мишени для первого курсанта равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что в мишень попадет только один курсант.

Решение:

Введем обозначение событий: A_1 – мишень поразит первый курсант, A_2 – мишень поразит второй курсант, A_3 – мишень поразит третий курсант.

Событие А – в мишень попадет только один курсант, равносильно тому, что или мишень поразит только первый курсант, а второй и третий при этом промахнутся, или мишень поразит только второй курсант, а первый и третий промахнутся, или мишень поразит только третий курсант, а первый и второй промахнутся, тоесть $A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, где $\overline{A_1}$ – промахнется первый курсант, $\overline{A_2}$ – промахнется второй курсант, $\overline{A_3}$ – промахнется третий курсант.

По условию задачи $p(A_1) = 0.7$, $p(A_2) = 0.8$, $p(A_3) = 0.9$, тогда

$p(\overline{A_1}) = 1 - 0.7 = 0.3$, $p(\overline{A_2}) = 1 - 0.8 = 0.2$, $p(\overline{A_3}) = 1 - 0.9 = 0.1$.

Искомая вероятность:

$p(A) = 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.9 = 0.014 + 0.024 + 0.054 = 0.092$

Ответ: 0,092

Задание 8: в первом ящике 3 белых и 8 черных шаров, во втором – 6 белых и 5 черных. Из первого наудачу переложили один шар. Какова теперь вероятность вынуть из первого ящика черный шар?

Решение:

Введем события:

A_1 – из первого ящика переложен белый шар.

B_1 – из первого ящика переложен черный шар.

A_2 – из первого ящика вынут белый шар.

B_2 – из первого ящика вынут черный шар.

По условию задачи, $p(A_1) = \frac{3}{11}$, $p(B_1) = \frac{8}{11}$, $p(B_2 / A_1) = \frac{8}{10}$, $p(B_2 / B_1) = \frac{7}{10}$.

Искомую вероятность того, что из первого ящика будет вынут черный шар, найдем по формуле полной вероятности:

$$p(A)= p(A_1)\cdot p(B_2/A_1)+p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)=\frac{3}{11}\cdot\frac{8}{10}+\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10}=\frac{24+56}{110}=\frac{80}{110}=\frac{8}{11}$$

Ответ: $\frac{8}{11}$.

Задание 9: Требуется найти а) математическое ожидание; б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по данному закону ее распределения, заданному таблично (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке – вероятности возможных значений).

x_i	**10**	**12**	**20**	**25**	**30**
p_i	**0,1**	**0,3**	**0,1**	**0,4**	**0,1**

Решение:

Математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i p_i=10\cdot 0.1+12\cdot 0.3+20\cdot 0.1+25\cdot 0.4+30\cdot 0.1=1+3.6+2+10+3=19.6$$

Дисперсия:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2 p_i-(M(X))^2=10^2\cdot 0.1+12^2\cdot 0.3+20^2\cdot 0.1+25^2\cdot 0.4+30^2\cdot 0.1-(19.6)^2=$$

$$=10+43.2+40+250+90-384.16\approx 49$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 19,6; 49; 7.

Задание 10: По данным на 19 октября 2004г. В районах Красноярского края обмолочено зерновых в (%): 94,9; 97,9; 93,2; 84,6; 96,6; 94,1; 97; 92; 75,5; 88; 74; 98,1; 89,2; 97,5; 95,9; 98,7; 97,6; 90,7; 84,2; 80,3; 81,3; 79,2; 92,1; 100; 94,4; 100; 100; 97,2; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 33,8; 80; 98,3; 77,7; 86,4; 91. Постройте интервальный ряд, гистограмму частот, найдите среднее количество обмолоченных гектар в %, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

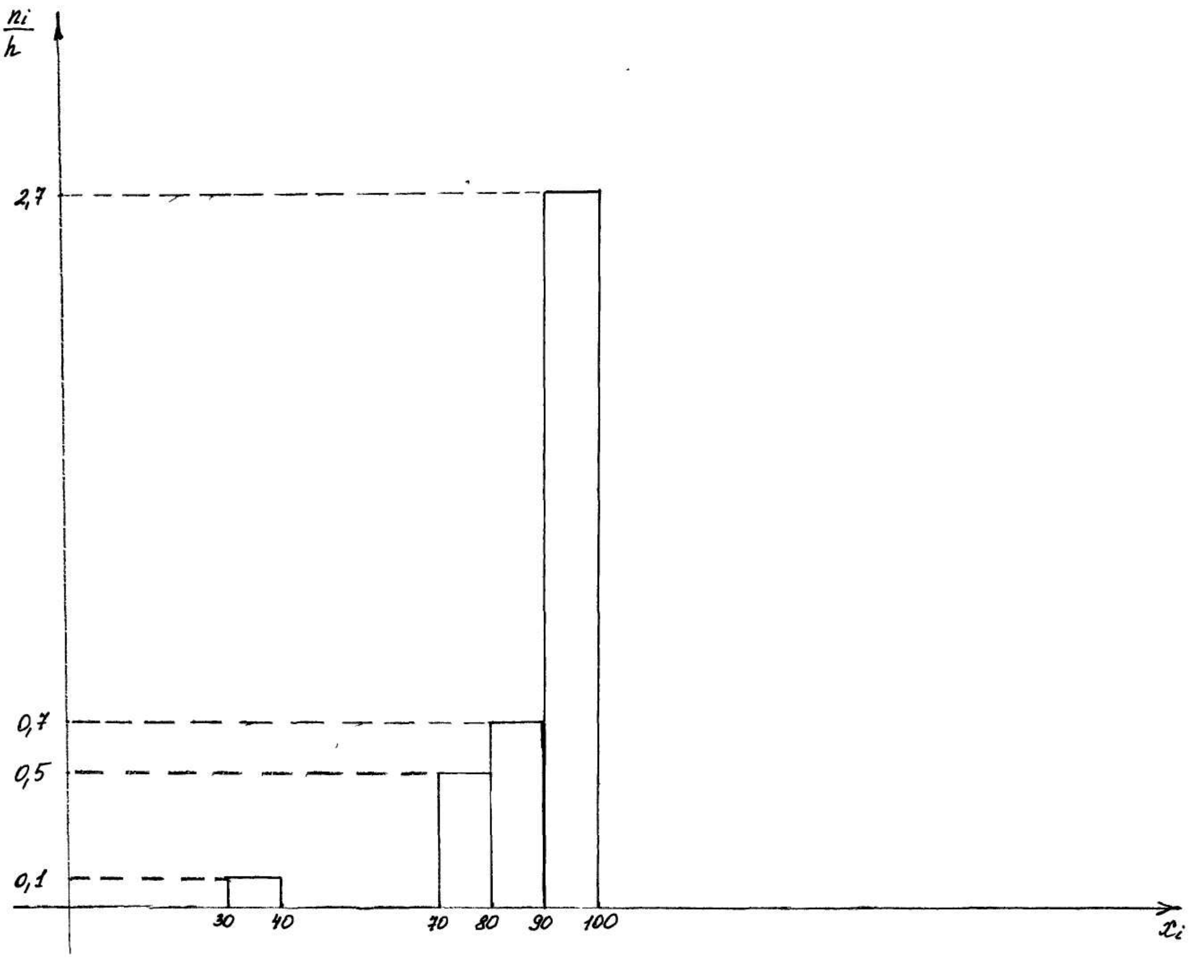
Сначала найдем величину интервала группировки:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min} + 0.1}{1 + 3.322 \cdot \lg n} = \frac{100 - 33.8 + 0.1}{1 + 3.322 \cdot \lg 40} \approx 10$$

Имеем следующий интервальный ряд:

№ интервала, i	Частичный интервал, x_i- x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала, n_i	Плотность частоты, n_i/h
1	30-40	1	0.1
2	40-50	0	0
3	50-60	0	0
4	60-70	0	0
5	70-80	5	0.5
6	80-90	7	0.7
7	90-100	27	2.7

Построим гистограмму частот:



Для нахождения числовых характеристик интервального ряда, преобразуем его в точечный, найдя середины интервалов, имеем:

x_i	35	75	85	95
n_i	1	5	7	27

Среднее количество обмолоченных гектар:

$$M(X) = \frac{35\cdot 1 + 75\cdot 5 + 85\cdot 7 + 95\cdot 27}{40} = \frac{35 + 375 + 595 + 2565}{40} = \frac{3570}{40} = 89.25$$

Дисперсия:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i^2 p_i}{n} - \left(M(X)\right)^2 = \frac{35^2\cdot 1 + 75^2\cdot 5 + 85^2\cdot 7 + 95^2\cdot 27}{40} - (89.25)^2 =$$

$$= \frac{1225 + 28125 + 50575 + 243675}{40} - 7965.5625 = 8090 - 7965.5625 = 124.44$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{124.44} = 11.16\,.$$

Ответ: 89,25; 124,44; 11,16.